Fonctions monotones
(Remarques)

1) $\boxed{\text{Un résultat bien connu}}$: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone (I intervalle de $\mathbb{R}$). Alors f a au plus un nombre dénombrable de discontinuités

démonstration : on suppose f croissante pour fixer les idées

a) si $I = [a,b]$ (intervalle compact) la somme des sauts de f est $\leq f(b)-f(a)$. Alors $D_n = \{x \in I ; f(x^+)-f(x^-) > \frac{1}{n}\}$ est fini donc $D = \{x \in I ; f(x^+)-f(x^-) > 0\} = \bigcup_n D_n$ est au plus dénombrable.

b) si $I = (a,b)$ est ouvert ou semi ouvert, l'ensemble $D_N = \{x \in [a+\frac{1}{N}, b-\frac{1}{N}] ; f(x^+)-f(x^-) > 0\}$ est au plus dénombrable d'après a). Alors $D = \{x \in I ; f(x^+)-f(x^-) > 0\} = \bigcup_N D_N$ est au plus dénombrable.

2) $\boxed{\text{Une idée fausse}}$: Une fonction monotone n'est pas forcément continue par morceaux !

On peut s'en convaincre par un raisonnement probabiliste simple :

considérons une énumération des rationnels :

$\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

On définit une loi de probabilité en affectant à x_n la masse $\frac{1}{2^n}$. La fonction de répartition $F(t)$ de cette loi ($F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ où X est la variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_n avec la probabilité $\frac{1}{2^n}$) est une fonction monotone qui en chaque point x_n a un saut

$$F(x_n) - F(x_n^-) = \frac{1}{2^n}.$$

F n'est évidemment pas continue par morceaux et elle n'est continue sur aucun intervalle puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Voici un exercice en lien direct avec ce qui précède :

Fonctions de sauts

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $t \mapsto s_x(t) = \mathbb{1}_{[x,+\infty[}(t)$ (fonction d'Heaviside au point x). Soit (σ_n) une suite de réels >0 tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < +\infty$ et (x_n) une suite de réels. On considère la fonction

$$t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n s_{x_n}(t).$$

a) Montrer que la fonction précédente est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $s(t)$ sa somme.

b) Montrer que $s(t)$ est monotone croissante et que

$$\lim_{t \to -\infty} s(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} s(t) = \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n .$$

c) Montrer $s(t)$ est discontinue en tout point $t = x_n$ $(n \geq 1)$ et qu'elle est continue en tout $t \notin \{x_n ; n \geq 1\}$.

Décomposition d'une fonction monotone en partie continue et partie fonction de sauts et application aux probabilités.

4

Soit F une fonction croissante bornée, dont l'ensemble des discontinuités est noté $\{x_n ; n \geq 1\}$. On note $\sigma_n = F(x_n^+) - F(x_n^-)$ le saut de F en x_n. Montrer que la fonction

$$F_1(t) = F(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n s_{x_n}(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

est continue croissante.

En déduire que toute mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est le barycentre d'une probabilité diffuse et d'une probabilité discrète.